DET KONGELIGE DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS PJECESERIE

GRUNDVIDENSKABEN I DAG

17

WERNER FENCHEL

OM MATEMATIKKENS BEGREBER OG METODER

UDGIVET AF FOLKEUNIVERSITETET I KØBENHAVN

1979

WERNER FENCHEL er født i Tyskland. Han studerede matematik og fysik ved Berlings universitet og blev dr. phil. i 1928. Efter den nazistiske magtovertagelse måtte han forlade Tyskland og kom til Danmark, hvor han blev knyttet til Københavns Universitets matematiske institut. Fra 1951–56 var han professor ved Danmarks tekniske højskole, derefter indtil 1974 ved Københavns Universitet. I 1946 blev han medlem af Videnskabernes Selskab.

Werner Fenchel har skrevet en række bøger og tidsskriftsartikler, især om geometriske emner.

Hæfte 16–20 udgives med støtte fra Carlsbergs Mindelegat for Brygger J. C. Jacobsen.

Forlag:
Folkeuniversitetet i København
Købmagergade 52
1150 København K

Werner Fenchel

OM MATEMATIKKENS BEGREBER OG METODER

Dette foredrag indgår i rækken med fællestitlen „Grundvidenskaben i dag". For matematikkens vedkommende ville det imidlertid være en håbløs opgave i den korte tid, der er til rådighed, at give en for ikke-matematikere tilgængelig beskrivelse af problemer matematikerne for tiden er optaget af. Jeg må nøjes med ud fra nogle simple og tildels velkendte eksempler at belyse karakteristiske træk i den nyere matematik og dens anvendelser. De nutidige opfattelser, som jeg skal søge at give et indtryk af, er resultaterne af en meget lang og ret kompliceret udvikling, og de i det følgende omtalte motiveringer genspejler derfor ikke altid det historiske forløb. For at undgå skævheder skal jeg afstå fra at nævne matematikernavne.

Lad os begynde med at kaste et blik på de såkaldte *naturlige tal* 1, 2, 3, . . . Når man skal multiplicere to sådanne tal, f. eks. 376 og 1513, går man ud fra, at det er ligegyldigt, i hvilken orden man tager faktorerne, skønt udregningerne former sig helt forskelligt i de to tilfælde. Lad os se bort fra, at der her benyttes flere regneregler og især måden at skrive tallene på, titalssystemet, men kun hæfte os ved, at vi betragter det som oplagt, at $376 \cdot 1513 = 1513 \cdot 376$, uden at efterprøve det. Der er næppe mange iblandt os, der husker, hvordan læreren har overbevist os herom. Det kan tænkes at være sket ved en henvisning til f. eks.

$$3 \cdot 5 \quad = \quad 5 \cdot 3$$

Man er da ikke i tvivl om, at tilsvarende kan gøres for hvilke som helst to naturlige tal, og kommer således til at indse rigtigheden af uendelig mange udsagn. Menneskets evne til at drage sådanne slutninger må anses for at være en af kimene til matematikken.

Intuitive betragtninger af denne art har ledet og leder stadig til ny indsigt, men deres pålidelighed er begrænset, og der er behov for en anden af menneskets evner, nemlig at kunne drage logiske slutninger. Den sætter os i stand til at *bevise* påstande, dvs. at slutte deres rigtighed ud fra udsagn, som forudsættes eller allerede er fundet at være rigtige. Anvendelsen på de naturlige tal kræver naturligvis, at grundlaget, der skal bygges på, præciseres. Forsøger man at sige nøjagtigt, hvad et naturligt tal er, kommer man imidlertid i store vanskeligheder, og der rejser sig spørgsmålet, hvordan det kan gå til, at man alligevel er i stand til i fuld sikkerhed at operere med tallene og at stole på resultaternes anvendelighed. Det er næppe muligt at give et helt tilbundsgående svar, men en nærliggende betragtning giver en vejledning til matematikernes syn på problemet. At lære at regne er jo en langvarig proces, der ender med, at vi behersker den decimale skrivemåde for de naturlige tal, forskrifter til udførelse af regneoperationerne og en række regneregler. Alt dette motiveres ved utallige eksempler, anvendelser og betragtninger som den ovennævnte. Men når vi regner, må vi gerne glemme alle disse begrundelser og behøver heller ikke nogen præcis definition af naturlige tal. Denne adskillelse mellem de formale egenskaber på den ene side og deres motiveringer og anvendelser ved beskrivelse af erfaringer på den anden gør det muligt at give afkald på en egentlig definition af de naturlige tal og som grundlag at vælge nogle af deres simple formale egenskaber. Der er flere muligheder herfor. Jeg skal i korthed beskrive en af dem.

Ved formuleringen betjener man sig af det grundlæggende begreb *mængde*. Derved forstås en sammenfatning af objekter, konkrete eller fra vor tankeverden, som kaldes mængdens *elementer*. Hvis mængden består af endelig mange elementer, kan den angives ved at opremse disse. I matematikken har man imidlertid fortrinsvis med uendelige mængder at gøre. En sådans elementer må karakteriseres ved visse egenskaber. Ved en *delmængde* af en mængde M forstås en mængde, hvis elementer alle tilhører M. (Trods navnet er altså M en delmængde af sig selv.)

Her kan med rette indvendes, at mængdedefinitionen er langtfra at være præcis. Hvad menes med egenskab? De i det følgende omtalte eksempler vil kaste noget lys på brugen af begrebet, og i foredragets slutning skal jeg sige nogle ord om spørgsmålet.

Den efterfølgende karakterisering af de naturlige tal tager sit udgangspunkt i og er en præcision af, at der efter hvert naturligt tal følger et bestemt andet, altså at man kan tælle, opremse tallene i den rette orden, uden at tælle noget, og at man ved ubegrænset fortsættelse får dem alle med.

Om en mængde N, kaldet mængden af naturlige tal, forudsættes, at den opfylder følgende *„aksiomer“*:

1) Til hvert af dens elementer svarer der et bestemt andet, som kaldes det førstes efterfølger.
2) Hvert element, med undtagelse af et enkelt, som betegnes med 1, er efterfølger af præcist ét element.
3) Hvis en delmængde af N indeholder 1 og med hvert af dens elementer også dettes efterfølger, er den hele mængden N.

Den sidste forudsætning, det såkaldte *induktionsaksiom,* udsiger i mere jævne ord: Antag, at der om en påstand vedrørende de naturlige tal kan bevises for det første, at den er rigtig for tallet 1, og for det andet, hvis den er rigtig for et naturligt tal, da også for det efterfølgende. Da er den rigtig for alle naturlige tal. Dette accepteres jo uden videre: Påstanden er rigtig for 1, altså også for efterfølgeren 2, altså også for efterfølgeren 3, osv.

Det er bemærkelsesværdigt, at de nævnte tre aksiomer er tilstrækkelige til at udlede alle de kendte egenskaber ved de naturlige tal. Med induktionsaksiomet som afgørende hjælpemiddel kan bevises, at man i mængden N kan definere to *kompositioner,* dvs. forskrifter, som hver til to vilkårlige elementer taget i en bestemt orden lader svare et bestemt tredie element. Dette kaldes henholdsvis de to førstes sum og produkt. For disse kan da bevises gyldigheden af de følgende regneregler, af hvilke alle øvrige kan udledes:

Kommutative love

$$a + b = b + a \qquad\qquad a \cdot b = b \cdot a$$

Associative love

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad\qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Subtraktionens entydighed — *Divisionens entydighed*

Til givne a og b

findes højst ét x, så at — findes højst ét x, så at

$$a + x = b \qquad\qquad a \cdot x = b$$

Distributiv lov

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Her står bogstaverne for vilkårlige, ikke nødvendigvis indbyrdes forskellige elementer af $N,$ og parenteserne er brugt til at angive, hvilke udregninger der skal foretages først. Således betyder $(a + b) + c$, at $a + b$ skal udregnes og til resul-

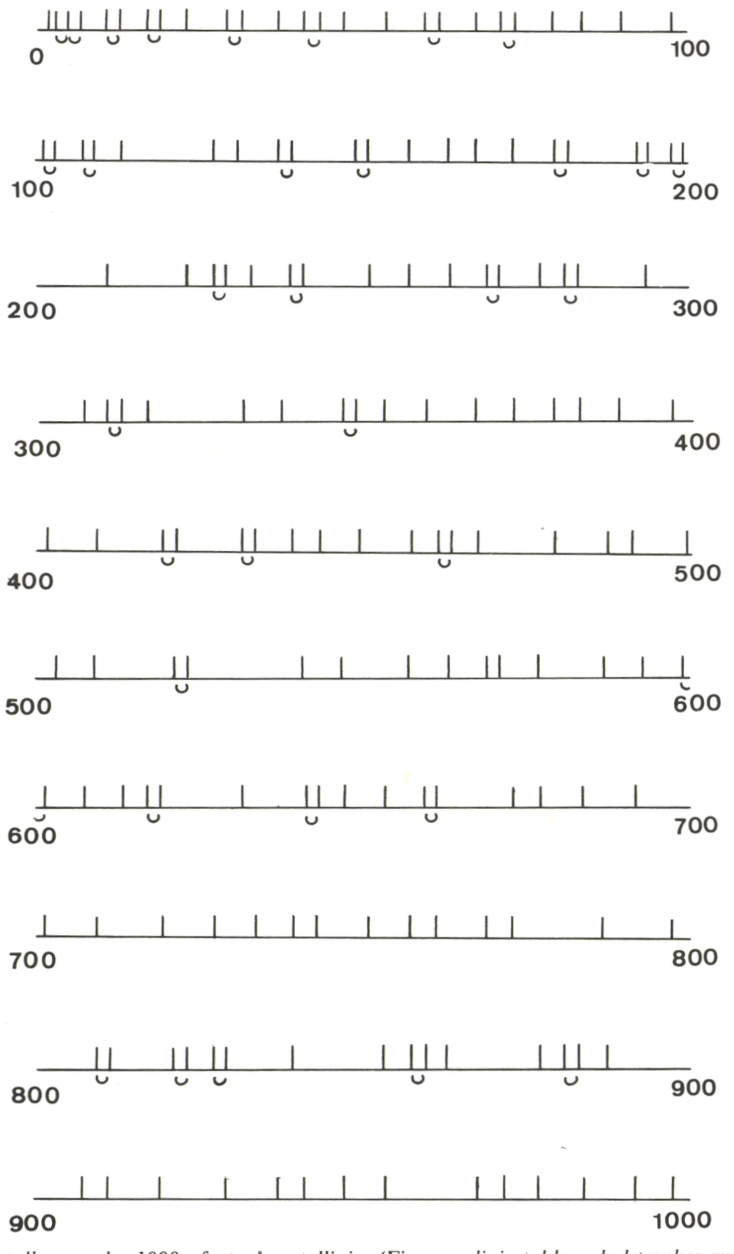

Fig. 1. Primtallene under 1000 afsat på en tallinie. (Figurens liniestykker skal tænkes anbragt i forlængelse af hinanden). Primtaltvillinger er fremhævet ved små buer.

tatet skal lægges c, medens $a + (b + c)$ betyder, at der til a skal lægges summen af b og c. På højre side i den distributive lov burde der herefter stå $(a \cdot b) + (a \cdot c)$. Men for at spare parenteser har man vedtaget, at multiplikation går forud for addition, når ikke andet er angivet.

Det er let at definere, hvad der menes med, at et naturligt tal er mindre end et andet: $a < b$ betyder, at der findes et element x i N, således at $a + x = b$. Man beviser da let nogle simple regler for sådanne uligheder, som jeg ikke skal angive her.

Det anførte, tilsyneladende meget spinkle grundlag for systemet af naturlige tal leder til mange, tildels yderst vanskelige problemer. Er a og b naturlige tal, findes der enten ikke noget naturligt tal x, således at $a \cdot x = b$, eller der findes netop ét. I det sidste tilfælde siges a at gå op i b eller b at være delelig med a. Hvert naturligt tal er deleligt med 1 og sig selv. Hvis det ikke er deleligt med noget andet naturligt tal, kaldes det et *primtal*. (1 regnes dog ikke med til primtallene). Siden oldtiden ved man, at der findes uendelig mange primtal. Hvis man afsætter dem på en tallinie, ser man, at de er overordentlig uregelmæssigt fordelt (fig. 1). Dette har givet anledning til mange, tildels overordentlig vanskelige undersøgelser. Især har man interesseret sig for, hvorledes antallet af primtal, der ikke overstiger et naturligt tal n, forholder sig i afhængighed af n. Det vokser meget uregelmæssigt med n, men ved hjælp af dybtgående resultater fra et andet af matematikkens områder lykkedes det at vise, at det, i en vis forstand, tilnærmelsesvis er $n/\log n$, hvor $\log n$ betegner den såkaldte naturlige logaritme af n. Problemer vedrørende primtallene danner stadig en udfordring til matematikerne. For at nævne et uløst: Der findes par af hinanden følgende primtal med differensen 2, f.eks. 5 og 7, 29 og 31, 107 og 109 (fig. 1). Selv om primtallene bliver sjældnere og afstanden imellem dem i gennemsnit bliver større og større, forekommer der så langt man kender primtalrækken stadig sådanne „primtaltvillinger". Findes der uendelig mange?

En udvidelse af de naturlige tals system, nemlig ved indførelse af brøkerne, er man jo særdeles fortrolig med. Deres mangfoldige anvendelser i forbindelse med deling og måling bevirker, at man har på fornemmelsen at vide, hvad f.eks. 7/4 er. Men at give en eksakt beskrivelse er naturligvis ikke lettere end for naturlige tal. Situationen er imidlertid også her, at vi lærer at regne med brøkerne, og beherskelsen heraf kræver ikke nogen viden om, hvad brøkerne „egentlig" er. Lad mig sige nogle ord om den nyere matematiks syn på sagen. Motiveringen for udvidelsen af mængden N af naturlige tal er ønsket om at kunne dividere et tal med et vilkårligt andet, altså at sikre, at der til to givne tal a og b findes et tal x, således at $a \cdot x = b$. Når vi skriver b/a for dette x, står det på forhånd blot for et par af naturlige tal og får først en mening ved fastsættelse af regneforskrifter for sådanne par. Man kan tænke på spillebrikker, der er ganske uden interesse, så længe der ikke er vedtaget regler for spillet. Brøkernes utallige anvendelser giver vejledning og motivering for forskrifternes udformning. Her optræder imidlertid en lille vanskelighed. Brøker, som fremgår af hinanden ved forlængning eller forkortning, betragter vi jo som samme tal. Et sådant må altså defineres som en mængde af indbyrdes „ækvivalente" talpar, der hvert kan repræsentere det. De naturlige tal selv bliver da repræsenteret ved talpar, hvis sidste tal er 1. Gennemførelsen af det, der her er antydet, fører til følgende resultat: Det er muligt ud fra de naturlige tals egenskaber ved definition af mere sammensatte objekter og ved at foreskrive kompositioner for disse at udvide systemet af naturlige tal på en sådan måde, at de tidligere angivne regneregler og de ikke nævnte regler for uligheder bevarer deres gyldighed og at desuden division er uindskrænket mulig. Elementerne i den udvidede mængde kaldes positive *rationale tal.*

En yderligere meget kraftig udvidelse af talbegrebet, som man stifter lidt bekendskab med i skolen, nemlig indførelsen af de såkaldte *irrationale tal,* er, både hvad motivering og gennemførelse angår, mere indviklet. Allerede i oldtiden havde græske matematikere opdaget, at der ikke findes noget rationalt tal, hvis kvadrat er 2. På den anden side vidste man fra den elementære geometri, at når man har valgt et liniestykke som enhed, måtte diagonalen i et kvadrat med enhedsliniestykket som side have en længde, hvis kvadrat er 2. Knytter man på velkendt måde til hvert positivt rationalt tal det punkt på en halvlinie, hvis afstand fra dennes endepunkt er lig med tallet, fås ved en velkendt simpel konstruktion et punkt på halvlinien, som måtte svare til tallet $\sqrt{2}$, hvis et sådant findes (fig. 2). Dette og talrige lignende omstændigheder leder til forestillingen om, at der foruden de til rationale tal svarende punkter findes uendelig mange andre på halvlinien, der må svare til tal, som det imidlertid kun er muligt at bestemme tilnærmelsesvis, omend med så god en tilnærmelse som ønsket, ved rationale tal. Vi stifter bekendskab med disse irrationale tal i form af uendelige decimalbrøker. Meningen med en sådan er jo, at man får tilnærmende rationale tal ved at medtage endelig mange, men flere og flere decimaler.

Denne ukritiske opfattelse om de irrationale tals eksistens og overbevisningen om, at man kan regne med dem efter de for rationale tal gældende regler, indgik på afgørende måde i den rivende udvikling af den matematiske behandling af astronomiske og fysiske problemer og de derved benyttede grene af matematikken i tiden fra det syttende til midten af forrige århundrede. Grunden hertil var ikke, at man mente ved måling af en størrelse at kunne afgøre, om måltallet er rationalt eller irrationalt, hvilket jo øjensynlig er umulig på grund af enhver målings begrænsede nøjagtighed, men at der i de matematiske relationer, ved hvilke afhængighederne mellem fysiske størrelser beskrives, nødvendigvis indgår opera-

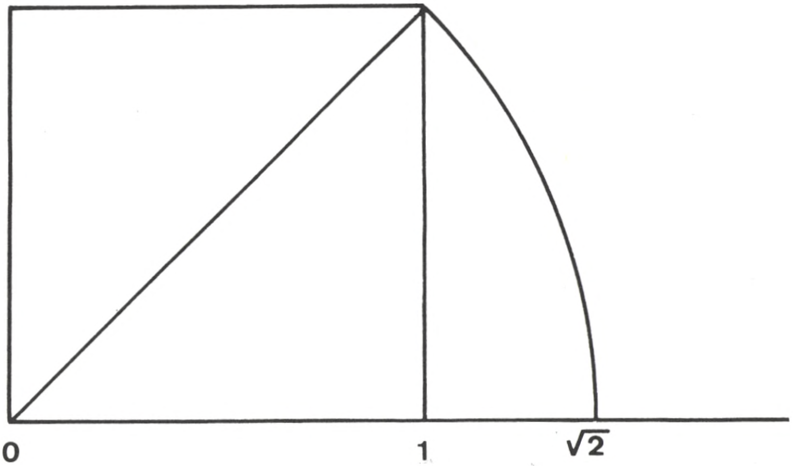

Fig. 2. Konstruktion af det til $\sqrt{2}$ svarende punkt på en tallinie.

tioner, der er meningsløse, når de irrationale tal ikke er til rådighed. Som et yderst simpelt eksempel kan nævnes: At bestemme svingningstiden for et pendul med given længde kræver uddragning af en kvadratrod.

Fortolkningen af tallene som punkter på en tallinie giver dem ganske vist et virkelighedspræg. Men faktisk skubber den bare problemet over på geometrien. Græske matematikere var allerede klare herover for ca. 2400 år siden. På grundlag af deres i hovedtrækkene eksakte opbygning af geometrien udviklede de en teori om forhold mellem liniestykker (spillebrikker mærket med to liniestykker), som ganske vist ikke opfattedes som tal, men dannede en, omend noget uhåndterlig, erstatning for disse. I den ovenfor nævnte periode følte man imidlertid ikke behov for en dyberegående analyse af sagen. Dette skete først i anden halvdel af forrige århundrede. Man tilstræbte da en eksakt begrundelse, som ikke var baseret på det ret indviklede geometriske grundlag. Man fandt flere måder at gøre det på, som alle kort kan karakteriseres således: Man betragter spillebrikker, der hver bærer uendelig mange rationale tal opfyldende visse betingelser. Man kan f.eks. tænke på en uendelig decimalbrøks cifre (hvilket dog ikke ville være det mest hensigtsmæssige valg). Dernæst skal man definere kompositioner, addition og multiplikation, i mængden af brikker på en hensigtsmæssig måde. Man kan da bevise, at alle regne- og ulighedsregler for rationale tal bevarer deres gyldighed, og opnår, at „hullerne" mellem de rationale tal i en vis forstand, som ikke lader sig præcisere i korthed, udfyldes.

De allerfleste anvendelser af talsystemet forudsætter endnu en udvidelse, nemlig indførelsen af 0 og de negative tal. Man kan pege på to motiveringer herfor.

Allerede i den babylonske astronomi har man forsynet månens vinkelafstand fra ekliptika med et særligt tegn for at angive, at månen står under, og ikke over, ekliptika. Nyere eksempler er benyttelsen til angivelse af fortid i modsætning til fremtid, termometerskalaen og mere alment tallinien, på hvilken jo vælges et nulpunkt og afstande fra dette regnes positiv til den ene og negativ til den anden side. Heraf får man næppe et indblik i, hvad negative tal er. Et vist virkeligheds-præg får de måske ved benyttelsen til angivelse af gæld. Den anden motivering er af rent matematisk art og går ligeledes langt tilbage i tiden. Ved løsning af simple ligninger kom man gang på gang ud for opgaven at trække et tal fra et, der er mindre. Holdningen hertil varierede stærkt. Snart forkastede man dette som meningsløst, snart accepterede man sådanne „absurde" tal med forbehold, som dog efterhånden forsvandt, da man opdagede, at man kunne regne med dem på tilvant måde og kom til meningsfyldte resultater.

Fra den nyere matematiks synspunkt drejer det sig igen om indførelse af en mængde af objekter definerede på grundlag af det allerede opbyggede talsystem og definition af regneoperationer for dem. Her kan man tænke på brikker, på hvilke der står 0 eller et rationalt eller irrationalt tal forsynet med tegnet + eller −. Forskriften for addition er let at motivere ud fra de nævnte fortolkninger, f. eks. på tallinien. Med multiplikationen forholder det sig anderledes. Hvorfor er $(-2) \cdot (-9) = +18$? Man kommer næppe ud for at skulle multiplicere to gældsposter. Et forsøg på at gøre sig klart, hvorledes man har lært at multiplicere negative tal, vil vel for de fleste resultere i, at det må have været lærerens diktat. Dette er ikke så urimeligt, idet valget af disse forskrifter udelukkende er bestemt ved ønsket om at bevare gyldigheden af de for positive tal gyldige regneregler. Det kan da også bevises, at dette opnås, dog med den ene undtagelse, at division med 0 ikke er mulig. Desuden opnås, at subtraktion altid er mulig. Vi har altså følgende regler:

$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Til givne a og b findes præcist ét x, så at	Til givne $a \neq 0$ og b findes præcist ét x, så at
$a + x = b$	$a \cdot x = b$

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Dertil kommer nogle regler for uligheder.

Det således opbyggede talsystem kaldes systemet af *reelle tal.* (Navnets oprindelse vil fremgå af det følgende). Som allerede nævnt danner det grundlaget for så godt som alle anvendelser af matematikken. Lad mig lige nævne et eksempel på brugen af negative tal, som ligger ret langt fra det, der har motiveret deres indførelse: positiv og negativ elektrisk ladning.

Der findes en yderligere udvidelse af talbegrebet, som er udelukkende matematisk motiveret, men har også vist sig at være et nyttigt hjælpemiddel på andre områder.

Når et reelt tal multipliceres med sig selv, får man som bekendt aldrig et negativt tal. På den anden side kommer man f. eks. ved forsøg på at løse visse andengradsligninger ud for at skulle uddrage kvadratroden af negative tal, hvilket jo ikke kan gøres inden for systemet af reelle tal. I det sekstende århundrede opdagede man, at hvis man regnede med de reelle tal sammen med det meningsløse symbol $\sqrt{-1}$ efter de sædvanlige regler og satte $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$, kom man til fornuftige resultater, også når $\sqrt{-1}$ ikke mere optrådte i disse. Det viste sig, at hvert af de „indbildte“, „imaginære“ tal, hvori $\sqrt{-1}$ indgår, kan skrives $a + b \cdot \sqrt{-1}$, hvor a og b er *reelle* tal. (Her er baggrunden for denne benævnelse). Skønt anvendelsen af de imaginære tal bl. a. førte til opdagelsen af mange betydningsfulde relationer mellem de såkaldte elementære funktioner, blev de, som navnet antyder, kun accepteret med stærke forbehold. Først omkring 1800, da man fandt på at lade $a + b \cdot \sqrt{-1}$ svare til det punkt i planen, som med hensyn til et valgt koordinatsystem har koordinaterne a og b, og kunne give simple geometriske beskrivelser af regneoperationerne, blev de imaginære tal fuldt ud accepteret. De fik da også det mindre suspekte navn *komplekse tal.* (Dog kaldes $\sqrt{-1}$, der betegnes med i, stadig den imaginære enhed). Den nævnte fortolkning af de komplekse tal forudsætter en eksakt opbygning af geometrien. Deres indførelse er imidlertid ikke afhængig deraf, men kan foretages helt på linie med de forudgående udvidelser af talsystemet. Man betragter par af reelle tal og fastsætter, hvad man vil forstå ved to pars sum og produkt. Vejledningen hertil fås af den omtalte ukritiske regnemåde. Man kan da bevise, at alle regneregler for reelle tal også er gyldige for de komplekse. Derimod kan ulighedsreglerne ikke overføres.

Det er ikke muligt her at gøre rede for den store betydning indførelsen af de komplekse tal har haft for store dele af matematikken. Jeg skal blot nævne en uventet anvendelse elektroingeniørerne har for dem. Når en vekselstrøm passerer et netværk, undergår den en forandring, som kan beskrives ved hjælp af to størrelser. De herfor gældende ret komplicerede love antager en simpel og overskuelig form, når de to størrelser sammenfattes til et komplekst tal.

Det ligger nær at spørge, om man har fundet anledning til yderligere udvidelser af talsystemet. Svaret er bekræftende, men så nærliggende motiveringer som de omtalte findes ikke. Spørgsmålet falder imidlertid inden for en meget almen problemstilling, som præger store dele af den nyere matematik. Man betragter mængder, om hvilke der ikke forudsættes andet end, at der er fastlagt en eller to kompositioner, altså forskrifter, der til hvilke som helst to elementer taget i en bestemt orden giver et bestemt tredie element i mængden. Idet de betegnes som addition og/eller multiplikation, kræves endvidere, at alle eller nogle af de ovenfor anførte regler gælder. Hvad slags elementer og kompositioner talen er om, lades helt ude af betragtning. Man tilstræber en klassifikation og indsigt i strukturen af sådanne „organiserede" mængder.

En mængde med to kompositioner, som tilfredsstiller alle nævnte regler eller alle med undtagelse af faktorers ombyttelighed, kaldes et *legeme*. (Navnet skal kun antyde, at det drejer sig om en organiseret helhed). Når divisionens uindskrænkede mulighed ikke er forudsat, taler man om en *ring*. Talsystemet giver nogle oplagte eksempler. Legemer er mængden af (positive og negative) rationale tal, mængden af reelle tal, mængden af komplekse tal, alle med de sædvanlige kompositioner. Et eksempel på en ring er mængden af alle (positive og negative) hele tal. Ved undersøgelser inden for den gren af matematikken, som kaldes algebra, stødte man på mange andre legemer og ringe, hvis elementer kunne være tal, mængder af tal eller visse funktioner. Dette gav stødet til den nævnte abstrakte opfattelse. Lad mig nævne et yderst simpelt eksempel på et legeme, hvis elementer ikke er tal. Mængden af hele tal falder i to delmængder, mængden af lige tal og mængden af ulige tal. Vi betragter mængden, hvis elementer er disse to mængder. Lad os kalde dem „lige" og „ulige" og fastsætte addition og multiplikation på den oplagte måde: „lige" + „lige" = „lige", „lige" + „ulige" = „ulige", . . . , „lige" · „lige" = „lige", „lige" · „ulige" = „lige", . . . Det er da let at verificere, at man får et legeme.

En anden variant af den abstrakte problemstilling spiller en fremtrædende rolle i store dele af matematikken og har fundet betydningsfulde anvendelser i fysik og kemi. Antag, at der i en mængde G er fastsat én komposition. Resultatet af denne anvendt på elementerne a og b vil vi give den neutrale betegnelse $a * b$. Det forlanges ikke, at $a * b = b * a$. Man kalder da G en *gruppe,* hvis blot følgende er opfyldt: $a * (b * c) = (a * b) * c$ og til givne a og b findes der præcis ét x, så at $a * x = b$ og præcist ét y, så at $y * a = b$. Man vil finde det overraskende, at dette yderst simple grundlag kan give anledning til dybtgående undersøgelser.

Det er let at angive eksempler på grupper bestående af tal: Mængden af alle hele tal med additionen som komposition, mængden af positive rationale tal, mængden af alle fra 0 forskellige komplekse tal, mængden bestående af tallene 1 og −1, disse tre med multiplikationen som komposition. Det er imidlertid ikke disse eksempler, der har givet anledning til opstilling af gruppebegrebet.

Lad os betragte 4 indbyrdes forskellige objekter. Vi kan give dem navnene 1, 2, 3, 4. Man taler om en *permutation* af dem, når hvert af dem erstattes med et andet eller sig selv, således at man igen får alle fire. En permutation angives ved, at man under hvert objekt skriver det, det skal erstattes med, f.eks. a og b (fig. 3 øverst). Af disse får vi en ny permutation $a * b$ ved at udføre a og b efter hinanden på følgende måde: Ved a erstattes 1 med 4 og ved b erstattes 4 med 3. Ved $a * b$ erstattes da 1 med 3. Ved a erstattes 2 med 1 og ved b erstattes 1 med 2. Ved $a * b$ erstattes da 2 med 2, og tilsvarende findes, at 3 erstattes med 1 og 4 med 4. Bestemmer man på samme måde $b * a$, finder man en anden permutation (fig. 3 øverst). Der findes i alt 24 permutationer af 4 objekter, den hvor hvert erstattes med sig selv medregnet. Med den beskrevne komposition danner permutationerne en gruppe. Det er sådanne permutationsgrupper for vilkårlige objekttal, som man stødte på ved undersøgelser over løsningerne af såkaldte algebraiske ligninger.

Andre tilskyndelser til opstilling af gruppebegrebet kom fra geometrien og krystallografien. En krystals fysiske egenskaber er ikke ens i alle retninger. Men den har symmetriegenskaber. Ved visse drejninger af krystallen føres hver retning over i en med de samme fysiske egenskaber. Udfører man to sådanne drejninger efter hinanden, vil resultatet også kunne opnås ved én drejning af den betragtede art. Dette fører til en komposition i mængden af disse drejninger, og det er let at se, at der opstår en gruppe.

Et simpelt eksempel kan beskrives således. Vi betragter en tynd kvadratformet plade i en bestemt stilling. Ved passende drejninger kan pladen bringes til at indtage sin oprindelige plads. Dette kan ske ved at dreje den i sin plan om centret én ret vinkel, to rette vinkler eller tre rette vinkler, endvidere ved at dreje den to rette vinkler om en linie, der forbinder to modstående siders midtpunkter, eller om en diagonal. Tages også den „uegentlige drejning" med, ved hvilken pladen forbliver urørt, er der i alt 8 drejninger af den betragtede art (fig. 3). Udfører man to efter hinanden, må resultatet kunne opnås ved én af de 8 drejninger. Er a og b to af dem, er det hensigtsmæssigt ved $a * b$ at forstå den drejning, der fås ved først at udføre b og dernæst a. Det er let at eftervise, at mængden af de 8 drejninger med den således fastlagte komposition er en gruppe. Nummereres kvadratets vinkelspidser fra 1 til 4, vil hver af gruppens drejninger frembringe en permutation af dem. Man får derved 8 af de tidligere omtalte 24 permutationer af 4 objekter, der danner en *undergruppe* af hele permutationsgruppen. Her foreligger to forskellige „repræsentationer", som drejningsgruppe og som permutationsgruppe, af den samme „abstrakte" gruppe med 8 elementer.

Gruppebegrebet, så simpelt det er, er grundlaget for omfattende teorier. At undersøge strukturen af grupperne med endelig mange elementer har været og er stadig en stor udfordring. Lignende gælder for forskellige klasser af uendelige grupper. Det er ikke muligt her at komme ind på gruppeteoriens mangfoldige an-

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a * b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b * a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

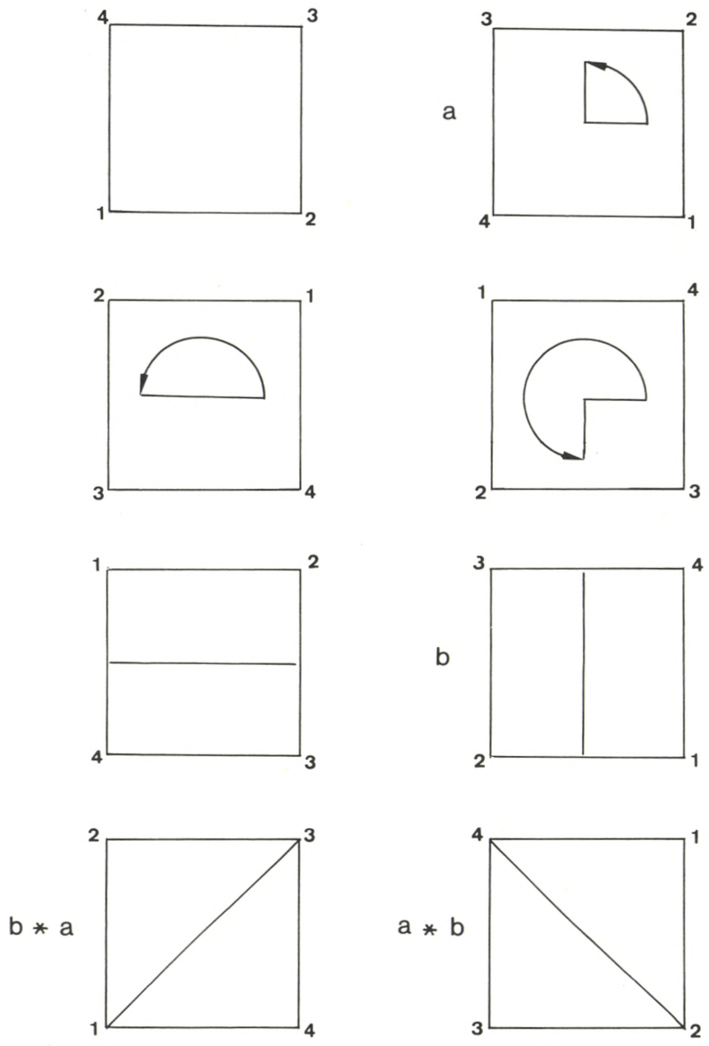

Fig. 3. Permutationer a *og* b *og de ved komposition af dem resulterende.*
Drejninger, efter hvilke et kvadrat indtager sin oprindelige plads, angivet ved drejningsvinklen eller linien, om hvilken der drejes. Ved drejningerne, der frembringer permutationerne ovenfor, er disse angivet.

vendelser i forskellige områder af matematikken. Uden for denne er den et hjælpemiddel i krystallografien, og dette langt videregående end tidligere omtalt, idet den tillader at klassificere de regelmæssige systemer af partikler, som krystallerne jo er, efter deres symmetriegenskaber. Endvidere har dybtgående gruppeteoretiske resultater fundet anvendelse i kvantemekanikken ved studiet af vekselvirkningerne mellem et atoms eller molekyles partikler.

Lad os nu tage et andet, særdeles velkendt udgangspunkt. Vi betragter det som en selvfølge, at vi på et kort over en by eller landsdel kan aflæse vejlængder, vinkler under hvilke veje krydses, osv. Vi går altså ud fra, at man kan gengive en del af jordens overflade eksakt i formindsket målestok. Naturligvis er målingerne, som kortene er baseret på, nødvendigvis behæftet med små unøjagtigheder, og kort over større områder kan på grund af jordoverfladens krumning overhovedet ikke have de nævnte egenskaber. Men bortset herfra kan man spørge, hvorfra vi har overbevisningen om, at der til en vilkårlig figur findes *ligedannede,* dvs. figurer, i hvilke vinklerne og forholdene mellem afstande stemmer overens med dem i den oprindelige. Man kommer ud for eksempler af forskellig art, men i præcis form vist kun i skolen, når der bevises sætninger om ensvinklede trekanter. Herved er der bl. a. talen om punkter, rette linier og planer, i hvert fald planen, hvori alt foregår. Ganske vist har vi erhvervet ret præcise forestillinger om, hvad der menes med disse gloser, men ethvert forsøg på at give eksakte definitioner er dømt til at mislykkes. Hvad man end kan pege på, blyantsprikker eller -streger, strakte tråde, lysstråler, bordplader, giver kun mere eller mindre grove billeder af det der menes. Den brug fysikerne gør af begreberne kan heller ikke hjælpe. Ved beregning af jordens bane om solen kan jorden behandles som et punkt, medens man i kernefysikken end ikke kan gøre det med en atomkerne.

Som ved tallene og vist endnu mere påtrængende rejser sig her spørgsmålet om, hvorledes der på et så vagt grundlag kan bygges den eksakte geometri, som vi stifter bekendskab med. Matematikernes svar går igen ud på, at man giver afkald på beskrivende definitioner af de grundlæggende begreber og erstatter disse med abstrakte objekter, om hvilke der ikke forudsættes andet, end at der består visse relationer imellem dem, som præciserer forestillinger vundne ved anskuelse og erfaring. Der er en vis frihed i valget af disse forudsætninger. Jeg skal i korthed beskrive et „aksiomsystem“ som grækernes, i flere henseender ufuldstændige, har inspireret til.

Man betragter en mængde, som kaldes *rummet,* og hvis elementer kaldes *punkter,* samt to slags delmængder af den, der kaldes henholdsvis *linier* og *planer.* Man afstår, som sagt, fra enhver beskrivelse af elementernes natur. Der op-stilles en række aksiomer, herunder: Til hvilke som helst to forskellige punkter findes der præcis én linie, der indeholder dem. Til tre punkter, som ikke tilhører samme linie, findes der præcis én plan, der indeholder dem. Hvis en linie har to forskellige punkter fælles med en plan, er alle dens punkter indeholdt i planen. Hvis to forskellige planer har et punkt fælles, har de en hel linies punkter fælles. Der findes fire punkter, som ikke tilhører samme plan. Hertil kommer aksiomer, der præciserer forestillinger om, at en linies punkter er ordnet, altså at man kan tale om, at et punkt ligger mellem to andre, og dermed om liniestykker. Endvidere er der brug for aksiomer, der giver et grundlag for behandlingen af figurers kongruens og flytning, og for nogle, der gør det muligt at indføre måltal for liniestykker og vinkler. Især må det sikres, at der kan etableres en korrespondance, ved hvilken der til hvert af en linies punkter tilordnes et reelt tal, og omvendt, på en sådan måde, at ordningen af liniens punkter kommer til at svare til ordningen af tallene efter størrelse.

I lange tider har man anset alt dette for selvindlysende og for et a priori nødvendigt grundlag for geometrien. I dette indgår imidlertid endnu et aksiom, det såkaldte *parallelaksiom,* som udsiger, at hvis der i en plan er givet en linie og et punkt udenfor denne, findes der i planen præcis én linie gennem punktet, som ikke skærer den givne linie. Selv om forestillingen om linier og planer, der strækker sig i det uendelige, ligger bag ved aksiomsystemet, er parallelaksiomet blevet betragtet som mindre selvindlysende og mindre tilgængeligt for sammenligning med erfaringer end de øvrige aksiomer. Dette foranledigede mange forgæves forsøg på at bevise det ud fra disse.

I første halvdel af forrige århundrede gjorde man imidlertid en opdagelse, der har medført en gennemgribende ændring af synet på geometrien. Det viste sig, at man som grundlag for en modsigelsesfri lærebygning kunne bruge de samme aksiomer, dog med parallelaksiomet erstattet med et andet, der siger, at der i en plan findes mindst to forskellige linier gennem et givet punkt, som ikke skærer en given linie. Denne såkaldte *ikke-euklidiske geometri* afviger i mange henseender fra den sædvanlige, *euklidiske,* f.eks. ved, at der ikke findes ensvinklede trekanter af forskellig størrelse. Herefter ligger det nær at spørge, hvilken af geometrierne der er den „sande“. I den ikke-euklidiske geometri indgår et fra 0 forskelligt tal, som i en vis forstand måler afvigelsen fra den euklidiske. Ved at vælge det tilstrækkeligt nær ved 0 kan opnås, at denne afvigelse inden for et nok så stort område bliver så lille man ønsker. Selv om vore erfaringer med overordentlig stor præcision kan beskrives ved hjælp af den euklidiske geometri, kunne derfor afvigelsen fra denne ligge under den opnåelige målenøjagtighed. Men det nævnte spørgsmål mister også mening af en anden grund. Geometriens anvendelse i astronomien, den eneste, der vedrører store områder, beror på antagelsen, at lyset udbreder sig langs rette linier. Det er altså nødvendigt at inddrage fysikkens love.

Alt dette førte til tanken, at man kunne opbygge geometrier, hvis struktur afviger langt videregående fra den euklidiske geometris. Man opgav kravet om, at figurer kan flyttes uændret, og tillod, at rummets geometriske struktur i en vis forstand varierer fra sted til sted, muligvis i afhængighed af de fysiske forhold. Omtrent 60 år efter dens udformning har denne generaliserede geometri vist sig at være det adækvate matematiske hjælpemiddel for den generelle relativitetsteori. Ifølge denne er den geometriske struktur uløseligt forbundet med materiens fordeling og de derved bestemte gravitationskræfter.

Dette har dog ikke formindsket den euklidiske geometris betydning for beskrivelsen af så godt som alle vore erfaringer og som inspirationskilde for videregående matematiske undersøgelser. Som bekendt benyttes i planens såkaldte *analytiske geometri* et koordinatsystem, f.eks. to på hinanden vinkelrette tallinier med fælles nulpunkt, til at fastlægge et punkt i planen ved et par af reelle tal, punktets koordinater (fig. 4). Herved er det muligt at omsætte geometriske sætninger i relationer mellem tal. Tilsvarende gælder for rummet, hvor der træder sæt af 3 tal i stedet for parrene. Man har så fundet på at betragte sæt af et vilkårligt givet antal n af reelle tal, kaldt et sådant sæt et punkt og mængden af alle sæt et *n-dimensionalt rum*. Endvidere har man, vejledet af forholdene i planen og det sædvanlige rum, fastsat, hvad man vil forstå ved afstanden mellem to punkter, ved en ret linie osv. Den tidligere omtalte generaliserede geometri for-

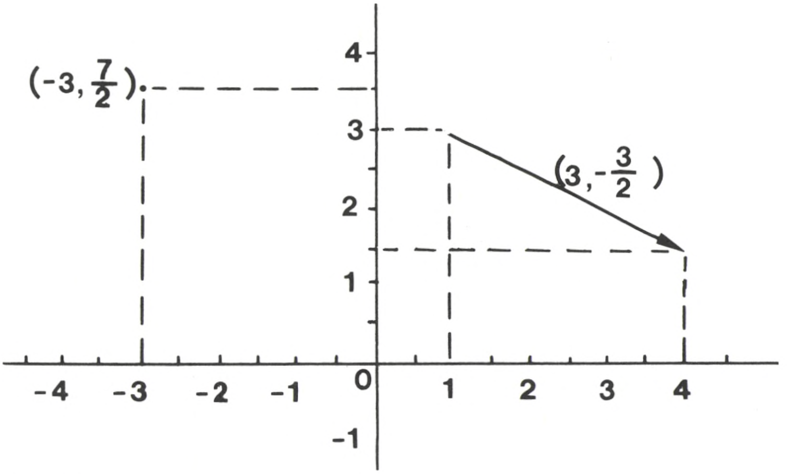

Fig. 4. Punkt med koordinaterne -3 *og* 7/2. *Vektor med koordinaterne* 3 *og* -3/2.

muleres også i denne ramme. Tilskyndelsen var i første omgang bare ønsket om at se, hvilke sætninger i den sædvanlige geometri der kunne generaliseres i den ene eller anden form. Der gjorde sig imidlertid også et andet synspunkt gældende. Lad mig illustrere det ved et eksempel. I mekanikken undersøges legemers bevægelse under indvirkning af kræfter. De stillinger, som et legeme, muligvis bestående af flere indbyrdes bevægelige dele, kan indtage, må fastlægges ved et vist antal reelle tal. En tynd stangs mulige stillinger i rummet kræver f.eks. 5. Man kan nu opfatte sådanne talsæt som punkter i et rum af den pågældende dimension. Til hver af legemets mulige stillinger svarer således et punkt i dette rum. Et andet eksempel foreligger i relativitetsteorien, hvor man behandler de tre rumkoordinater sammen med tiden som punkt i et 4-dimensionalt rum. I ingen af de nævnte eksempler er brugen af det geometriske sprog nødvendig, men det tillader ofte at formulere indviklede relationer på overskuelig måde og inspirerer til betydningsfulde undersøgelser.

En variant af denne generalisation af rumbegrebet har vist sig at være særlig frugtbar. Lad os et øjeblik vende tilbage til den sædvanlige plan. Ved en *vektor* i denne forstås et liniestykke med angivelse (på figurer ved en pilespids) af en af de to retninger, i hvilke det kan gennemløbes. Et af endepunkterne er altså valgt som begyndelsespunkt, det andet som endepunkt. To sådanne med retning forsynede liniestykker betragtes dog som samme vektor, når de har samme retning og længde. Vektorbegrebet har sin oprindelse i fysikken: en partikels hastighed eller en kraft virkende på en partikel har en bestemt retning og størrelse og kan derfor angives ved en vektor. I mængden af vektorer defineres en komposition, kaldet og betegnet som addition, på følgende måde: Lad vektorerne $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være givet. Man afsætter $\mathbf{u}$ fra et vilkårligt punkt, og fra endepunktet afsættes $\mathbf{v}$. Vektoren fra begyndelsespunktet af $\mathbf{u}$ til endepunktet af $\mathbf{v}$ er da $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (fig. 5). Desuden fastsættes, hvad det vil sige at multiplicere en vektor $\mathbf{u}$ med et reelt tal r: Hvis r er positiv, skal $r \cdot \mathbf{u}$ være den vektor, hvis længde er r gange længden af $\mathbf{u}$ og som har samme retning som $\mathbf{u}$; hvis r er negativ, skal $r \cdot \mathbf{u}$ være den vektor, hvis længde er det positive tal $-r$ gange længden af $\mathbf{u}$ og hvis retning er modsat retningen af $\mathbf{u}$ (fig. 5). For disse regneoperationer gælder en række regler, som for additionens vedkommende kan sammenfattes i, at $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ og at mængden af vektorer med additionen som komposition danner en gruppe. For multiplikationen af vektorer med tal gælder regler, der ligner nogle af de tidligere anførte regler for talsystemer.

Når et koordinatsystem er valgt, kan en vektor angives ved et talpar, nemlig differenserne mellem endepunktets og begyndelsespunktets koordinater (fig. 4). De beskrevne regneoperationer oversættes derved til operationer med talpar.

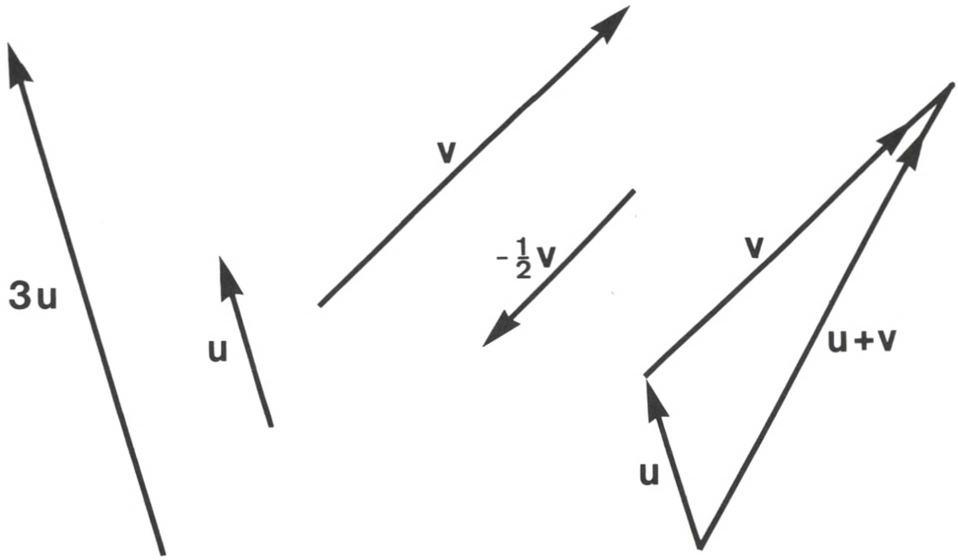

Fig. 5. Multiplikation af en vektor med et tal. Addition af to vektorer.

Herefter er det let at se, hvorledes det hele overføres til rum af vilkårlig dimension. Denne giver sig tilkende på følgende måde: Vælger man i planen to vektorer, der ikke er parallelle, kan enhver vektor i planen fremstilles som en sum af 2 vektorer, der hver fås af en af de valgte ved multiplikation med et tal. I det sædvanlige rum kræves der valget af 3 vektorer, almindeligt af så mange som dimensionstallet angiver.

Man har imidlertid givet sagen en endnu mere abstrakt drejning, svarende til den, der fører til gruppebegrebet. Ved et *vektorrum* forstås en mængde V, hvis elementer kaldes vektorer, og som opfylder følgende betingelser: Der er fastlagt en komposition, som betegnes som addition, og en forskrift, der til hvert reelt tal og hver vektor lader svare en vektor, som kaldes vektorens produkt med tallet, på en sådan måde, at de før omtalte regler gælder. Ofte er det hensigtsmæssigt yderligere at forudsætte, at der er fastlagt en forskrift, der til hver vektor lader svare et tal, kaldet dens længde, således at visse betingelser er opfyldt.

Betydningsfulde typer af vektorrum har funktioner som elementer. Ved en funktion forstås helt generelt en forskrift f, der til hvert element i en given mængde A lader svare et bestemt element, betegnet $f(x)$, af en given mængde B. Her skal vi nøjes med at betragte tilfældet, hvor A og B er mængder af reelle tal. Beskrivelsen af en størrelses afhængighed af en anden ved hjælp af en sådan funktion f er man jo fortrolig med. Efter valg af et koordinatsystem i planen kan

f anskueliggøres ved dens grafiske billede, der udgøres af punkterne, hvis første koordinat er et tal x i A og hvis anden koordinat er den tilsvarende funktionsværdi $f(x)$. Er f og g to funktioner af denne art, er det oplagt, hvad man vil forstå ved deres sum $f + g$: funktionen, der til x lader svare $f(x) + g(x)$ (fig. 6). Er r et reelt tal, vil man ved $r \cdot f$ forstå funktionen, der til x lader svare $r \cdot f(x)$ (fig. 6).

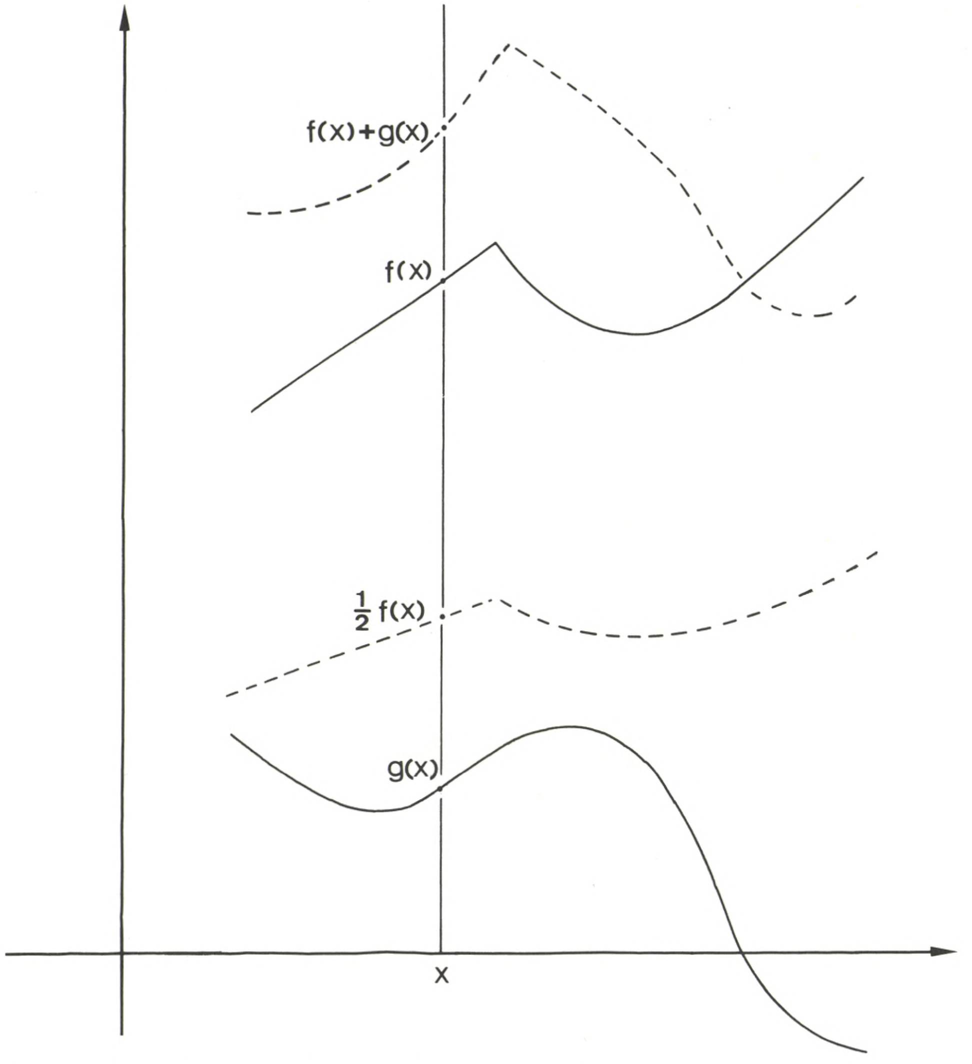

Fig. 6. Multiplikation af en funktion f *med et tal. Addition af to funktioner* f *og* g.

Det er let at bevise, at disse operationer opfylder alle de i definitionen af vektorrum stillede krav. Der findes altså vektorrum, hvis vektorer er funktioner. Et forsøg på at bestemme et sådant vektorrums dimension efter den tidligere beskrevne fremgangsmåde vil almindeligvis slå fejl. I sådanne tilfælde taler man om et uendelig-dimensionalt vektorrum.

For at illustrere nytten af indordningen af disse forskellige strukturer i en fælles ramme og af bibeholdelsen af det geometriske sprog skal jeg i korthed omtale det såkaldte *egenværdiproblem,* som har fundet uventede anvendelser. I et 2-dimensionalt vektorrum, som vi kan forestille os som planen, går det efter en vis forenkling, som gør det mere anskueligt, ud på følgende. Man betragter en ellipse, der skal tænkes givet ved en ligning, der tilfredsstilles af koordinaterne for dens punkter (fig. 7). Den har et centrum, her koordinatsystemets nulpunkt, og to symmetriakser. Det drejer sig om at bestemme såkaldte *egenvektorer,* dvs. vektorer, der har symmetriaksernes retninger. Endvidere er man interesseret i de såkaldte *egenværdier,* tal som let kan beregnes ud fra længderne af de egenvektorer, som afsat fra centret ender på ellipsen. Dette er et elementært problem, men tilsvarende problemer kan stilles i vektorrum af vilkårlig, endelig eller uendelig dimension, og behandlingen kræver da avancerede hjælpemidler.

Når et legeme sammensat af partikler og stive dele, der kan bevæge sig i forhold til hinanden, befinder sig i en stabil ligevægtstilling og bliver påvirket af et lille stød, vil det udføre små svingninger. En nærmere undersøgelse af disse viser

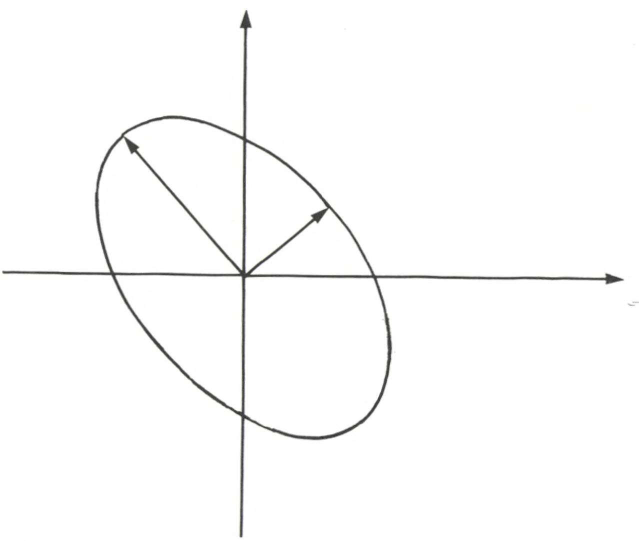

Fig. 7. Ellipse med egenvektorer.

sig at kræve løsningen af et egenværdiproblem i et vektorrum, hvis dimension er lig med antallet af tal, ved hvilke en stilling af legemet kan fastlægges. Som simpelt eksempel kan man tænke på en stang, som er ophængt i en elastisk snor. Dimensionstallet er her lig 5. Det viser sig, at svingningerne i en vis forstand kan sammensættes af de ved egenvektorerne bestemte „egensvingninger", der bevarer deres form og hvis svingningstal står i simpel relation til egenværdierne. Studiet af elastiske legemers svingninger kan på tilsvarende måde føres tilbage til egenværdiproblemer i uendelig-dimensionale vektorrum. I det simpleste tilfælde, en indspændt streng, er dette velkendt som opløsning af en tone i grundtone og overtoner.

Ud fra matematiske synspunkter har man foretaget endnu et skridt bort fra forestillingen ordet „rum" fremkalder. I stedet for de reelle tal, som vektorerne ifølge vektorrummets definition kan multipliceres med, lader man træde de komplekse tal. Et uendelig-dimensionalt komplekst vektorrum har vist sig at være den adækvate ramme for formuleringen af kvantemekanikkens love. Et atoms stationære tilstande og de til disse svarende energiniveauer bestemmes ved henholdsvis egenvektorerne og egenværdierne for et egenværdiproblem i dette vektorrum.

Lad mig tilføje nogle generelle bemærkninger om matematikkens rolle i andre videnskaber. Iagttagelser og eksperimenter vedrørende udsnit af vor erfaringsverden fører til opdagelser af afhængigheder mellem forskellige størrelser. Intuition fremkalder forestillinger om lovmæssigheder, der ved abstraktion omsættes til matematiske relationer. Matematikerens opgave er da at stille strukturer til rådighed, inden for hvilke relationerne kan formuleres, og at drage konklusioner, som kan sammenlignes med erfaringer til bekræftelse eller afkræftelse af teorien eller bruges til forudsigelser. At verden er indrettet sådan, at dette er muligt, må vi vel nøjes med at tage til efterretning.

Den overvejende del af de naturvidenskabelige teorier og, hvad man nutildags kalder *matematiske modeller,* hvormed menes sæt af matematiske relationer til beskrivelse af et mindre (ikke nødvendigvis naturvidenskabeligt) erfaringsområde, finder deres formulering inden for den *matematiske analyse,* som er baseret på de reelle tals system. Mange af dens grene har deres oprindelse i astronomiske og fysiske problemstillinger, men som nogle af de omtalte eksempler viser, har rent matematisk motiverede videreførelser og generalisationer vist sig at være særdeles nyttige. Et område, som også har fundet mange betydningsfulde anvendelser, er *sandsynlighedsregningen.* Dens oprindelse skyldes interessen for hazardspil. Den er nu en omfattende matematisk teori med et aksiomatisk grundlag. I lighed med behandlingen af geometriens grundbegreber giver man altså afkald på at sige, hvad sandsynlighed er, men opstiller aksiomer den skal opfylde.

Enhver anvendelse af matematikken på et erfaringsområde forudsætter idealiseringer, specielt at der negligeres omstændigheder, som i den pågældende sammenhæng skønnes at være af mindre betydning. I store dele af den klassiske fysik ser man f.eks. bort fra materiens og elektricitetens partikelstruktur, og dog fås en overordentlig nøjagtig beskrivelse af omfattende erfaringsområder. Mindre tilfredsstillende er situationen ved matematikkens anvendelser i biologi eller økonomi, hvor det ofte er nødvendigt at se bort fra omstændigheder, der kan have væsentlig indflydelse. Dette udelukker dog på ingen måde, at matematiske modeller inden for disse videnskaber kan give værdifuld vejledning.

Lad mig slutte med få ord om nogle grundlæggende spørgsmål, hvoraf jeg kun har berørt et enkelt, mængdebegrebets manglende præcision. Et andet vedrører den aksiomatiske metode, der, som det vil fremgå af det foregående, præger hele den nyere matematik. Ved valget af aksiomerne for et område er man principielt ret frit stillet, men det skal selvfølgelig foretages således, at der kan ventes resultater, der giver dyberegående matematisk indsigt og/eller tillader anvendelser på andre områder. Herved spiller intuition og vejledningen, erfaringerne fra omverdenen giver, den afgørende rolle. Der er imidlertid også en indskrænkning af principiel karakter: Det må ikke være muligt af aksiomerne at slutte en sætning og den modsatte. Ellers ville det hele blive meningsløst, idet man da kunne bevise hvad som helst. En sådan situation har vist sig at kunne opstå ved uhæmmet brug af det vage mængdebegreb. Hvordan kan man sikre sig imod noget sådant? Hvis man går ud fra, at en tidligere opbygget matematisk struktur er modsigelsesfri, og hvis man ved hjælp af denne kan definere objekter og relationer mellem disse, således at aksiomerne for en anden struktur er opfyldt, kan man slutte, at denne også er modsigelsesfri. På denne måde kan man under antagelsen af, at talsystemet er modsigelsesfrit, bevise, at de tidligere omtalte aksiomsystemer for den euklidiske og andre geometrier er modsigelsesfrie. Man vender så at sige den analytiske geometri på hovedet. Man kalder talsæt bestående af 3 tal for punkter, visse delmængder af mængden af sådanne sæt for linier, andre for planer osv. og beviser ved hjælp af de reelle tals egenskaber, at aksiomerne er tilfredsstillet. Dette lader imidlertid spørgsmålet om talsystemets modsigelsesfrihed åbent, og metoden kan øjensynlig ikke anvendes, når talen er om det så primitive mængdebegreb, der lægges til grund for det hele. Man har opstillet et aksiomsystem, hvori de i matematikken brugte operationer med mængder præciseres. De utallige anvendelser, man har gjort af dem, har ikke ført til modstrid. Men absolut sikkerhed for, at en sådan ikke kan opstå, har man ikke.

Matematikerens hovedaktivitet består i at bevise noget. Hvad vil det sige?

Svaret, ved hjælp af logikken ud fra udsagn, der vides at være rigtige, at slutte andre udsagns rigtighed, leder dog blot til andre spørgsmål. Hvad er logiske slutninger, og hvorfor kan vi stole på dem? Der findes næppe helt tilfredsstillende svar herpå, men et væsentlig skridt i retning af klarlæggelsen af de nævnte problemer var udviklingen af den *matematiske logik*. Man indførte symboler for udsagn og for de måder, de kan kombineres på til nye udsagn, og omsatte de i matematikken forekommende logiske slutninger til omformningsregler for formler dannet af disse symboler. På denne måde blev matematikkens grundlag så at sige lagt en etage dybere, og mange vanskelige principielle spørgsmål blev klarlagt. Forventningen om at kunne bevise talsystemets modsigelsesfrihed har imidlertid vist sig ikke at kunne indfris.

Den matematiske logik hører til de rent matematisk motiverede områder, der har fundet uventet anvendelse: Den har spillet en betydningsfuld rolle ved udviklingen af datamaterne.

Litteraturhenvisninger

Mange af de omtalte grundlæggende begreber behandles i nyere lærebøger i matematik for gymnasiet og HF. Udførlige og let tilgængelige fremstillinger findes i:

Bent Christiansen, Jonas Lichtenberg, Johs. Pedersen: *Almene begreber fra logik, mængdelære og algebra*. Munksgaard, København 1964.

Bent Christiansen, Jonas Lichtenberg: *Matematik 65. En elementær lærebog*. Munksgaard, København 1965.

(Allan Christiansen, Jonas Lichtenberg: *Opgaver til Matematik 65*. Munksgaard, København 1966).

Jon Reed, Johan Aarnes: *Matematikk i vår tid. En introduksjon*. Universitetsforlaget (Munksgaard), Oslo (København) 1967.

Let tilgængelig er også en væsentlig del af:

Svend Bundgaard: *Tallene og den abstrakte Algebras Grundbegreber*. Jul. Gjellerups Forlag, København 1942.

En elementær fremstilling af den ikke-euklidiske geometri findes i:

Erik Kristensen: *Ikke-euklidisk geometri*. G.C.E. Gad, København 1975.

Dyberegående, men ret let tilgængelige introduktioner i flere centrale områder af matematikken giver:

Richard Courant, Herbert Robbins: *What is Mathematics?* Oxford University Press, London - Toronto 1941. (Genoptrykt som billigbog 1979).

Nyere udgave på tysk: *Was ist Mathematik?* Springer-Verlag, Berlin - New York 1967.

De følgende bøger indeholder artikler om nyere områder af matematikken og deres anvendelser. En stor del af artiklerne skønnes at være tilgængelige for ikke-matematikere.

Mathematics: An Introduction to Its Spirit and Use. Readings from Scientific American. With introductions by Morris Kline. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif. - London 1978.

Mathematics Today. Twelve Informal Essays. Edited by Lynn Arthur Stein. Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin 1978.

Grundvidenskaben i dag er navnet på en række af 30 foredrag, som Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab afholdt i 1976–79. Fremtrædende forskere, hovedsagelig medlemmer af Selskabet, søgte ved at fortælle om udviklingen i den sidste menneskealder inden for de forskellige naturvidenskabelige og humanistiske videnskabsgrene at bidrage til større forståelse af den forskning, der ikke direkte stiler mod praktisk anvendelse, men mod forøget indsigt i sammenhængen i verden.

Pjeceserien bygger på disse foredrag. Fremstillingen er gjort så almen, at de enkelte hæfter kan tjene som udgangspunkt for videre beskæftigelse med de behandlede fag og emner. Hertil hjælper også omfattende litteraturhenvisninger.

Foredragene udgives i 30 hæfter (3 bind). De 10 første udkom 1977–78 med titelark i hæfte 10. Siden er 11–15 udsendt, og fra efteråret 1979 går serien videre. Prisen incl. 20,25% moms er kr. 13,10, fra nr. 11 dog kr. 14,25. Hæfterne kan købes i boghandelen, eller man kan få dem tilsendt fortløbende og portofrit ved at subskribere hos Folkeuniversitetet i København.

Titlerne er følgende:

1. Mogens Pihl: Hvad er grundvidenskab?
2. Erling Bjøl: Politik som videnskab.
3. Søren Egerod: Det fjerne Østens sprog – sammenhænge og påvirkninger.
4. C. Møller: Omvæltninger i fysikernes tankesæt i vort århundrede.
5. Arne Noe-Nygaard: Jordens nye ansigt.
6. Olaf Pedersen: De eksakte videnskabers historie.
7. P. Nørregaard Rasmussen: Økonomisk vækst.
8. Erik A. Nielsen: Hvad kan litteraturvidenskaben?
9. Ingmar Bengtson: Musikvidenskab – nu og i fremtiden.
10. Ole Maaløe: Biologiens molekylære grundlag.
11. Bernhard Gomard: Retsvidenskabens opgaver og særpræg.
12. C. Overgaard Nielsen: Økologi som grundvidenskab.
13. Arild Hvidtfeldt: Religionssociologiens plads blandt humaniora.
14. Hans H. Ussing: Om årsagerne til elektriske fænomener i levende organismer.
15. Niels Thomsen: Historiske opinionsstudier.
16. I. K. Moustgaard: Psykologien som eksperimentalvidenskab.
17. Werner Fenchel: Om matematikkens begreber og metoder.

Pris kr. 14,25 incl. 20,25% moms.

ISBN 87-87696-19-3

KROHN